Лекции по Приложениям эконометрики

Некоторые обобщения множественной регрессии.

- Стохастические регрессоры
- Обобщенный метод наименьших квадратов (Теорема Айткена).

Стохастические регрессоры 1

- Модель множественной регрессии

1. $y = X\beta + \varepsilon$ -спецификация модели

2. X – детерминированная матрица, имеет максимальный ранг k

3. $E(\varepsilon) = 0$; $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$

Т.е. регрессоры (матрица X) - неслучайные переменные.

Стохастические регрессоры 2

- Рассмотрим задачу со стохастическими регрессорами.
- Пусть

$$y = X\beta + \varepsilon$$

- Здесь y – $n \times 1$ вектор объясняемых переменных, X – $n \times k$ матрица объясняющих переменных, ε – $n \times 1$ вектор случайных ошибок.
 1. элементы матрицы X – случайные величины
 2. $E(\varepsilon|X) = 0$; $Var(\varepsilon|X) = E(\varepsilon\varepsilon^T|X) = \sigma^2 I_n$
 3. С вероятностью 1 матрица X имеет ранг k .
- Условие 2 эквивалентный вид:
 2. $E(y|X) = X\beta$; $Var(y|X) = \sigma^2 I_n$

Стохастические регрессоры 3

- Применим метод наименьших квадратов.
- Тогда оценка вектора параметров β по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Стохастические регрессоры 4

- Рассмотрим условные (относительно X) статистические характеристики оценки $\hat{\beta}$.
- $E(\hat{\beta}|X)$
- $Var(\hat{\beta}|X)$
- $E(e|X)$, где $e = y - \hat{y}$
- $Var(e|X)$, (обозначим $M = I - X(X^T X)^{-1} X^T$)

Стохастические регрессоры 5

- $E(\hat{\beta}|X) = \beta$
- $Var(\hat{\beta}|X) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$
- $E(e|X) = 0$
- $Var(e|X) = \sigma^2[I - X(X^T X)^{-1} X^T] = \sigma^2 M$

Стохастические регрессоры 6

- Найдём:
- $E(e^T e | X)$
- $E(\hat{\sigma}^2 | X)$
- $E(\widehat{Var}(\hat{\beta} | X))$

Стохастические регрессоры 7

- Получаем:
- $E(e^T e | X) = \sigma^2 \text{tr}(M)$
- $E(\hat{\sigma}^2 | X) = \sigma^2$
- $E(\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta} | X)) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Стохастические регрессоры 8

ВЫВОД

- Оценки $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$, $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ – условно (относительно X) несмещенные оценки.

Стохастические регрессоры 9

- Рассмотрим безусловные статистические характеристики оценки $\hat{\beta}$.
- $E(\hat{\beta})$
- $E(\hat{\sigma}^2)$
- $E(\widehat{Var}(\hat{\beta}))$

Стохастические регрессоры 10

- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$
- $E(\widehat{Var}(\hat{\beta})) = Var(\hat{\beta})$
- Таким образом, существует условный вариант Теоремы Гаусса-Маркова.

Стохастические регрессоры 11

- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$
- $E(\widehat{Var}(\hat{\beta})) = Var(\hat{\beta})$
- Таким образом, существует условный вариант Теоремы Гаусса-Маркова.

Стохастические регрессоры 12

Теорема Гаусса-Маркова (стохастические регрессоры).

- Пусть

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Здесь y – $n \times 1$ вектор объясняемых переменных, X – $n \times k$ матрица объясняющих переменных, ε – $n \times 1$ вектор случайных ошибок.

1. элементы матрицы X – случайные величины
 2. $E(\varepsilon|X) = 0$; $Var(\varepsilon|X) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$
 3. С вероятностью 1 матрица X имеет ранг k .
- Тогда оценка $\hat{\beta}$ вектора β по методу наименьших квадратов является наиболее эффективной (в смысле наименьшей условной ковариационной матрицы) среди всех линейных условно несмещенных оценок вектора β .

Стохастические регрессоры 13

- Вопрос: при каких условиях оценка $\hat{\beta}$ вектора β по методу наименьших квадратов является состоятельной?

Т.е. при выполнении каких условий

$$\lim \hat{\beta} \rightarrow^p \beta \text{ при } n \rightarrow \infty?$$

Стохастические регрессоры 14

- Теорема Слуцкого.
- Пусть каждая из последовательностей $\{X_n^j\}$ сходится по вероятности к константе: $\lim X_n^j \rightarrow^p c_j, j = 1, \dots, k$, и пусть функция g непрерывна в точке $(c_1, \dots, c_k)$. Тогда $\lim g(X_n^1, \dots, X_n^k) \rightarrow^p g(c_1, \dots, c_k)$ при $n \rightarrow \infty$.

Стохастические регрессоры 15

- Запишем $\hat{\beta}$ в следующем виде (домножим и разделим на n):

- $$\hat{\beta} = \beta + \left(\frac{1}{n}X^T X\right)^{-1} \left(\frac{1}{n}X^T \varepsilon\right)$$

- Пусть

1. существует $\lim \left(\frac{1}{n}X^T X\right) =^p A$ при $n \rightarrow \infty$, где A – положительно определенная матрица

2. $\lim \left(\frac{1}{n}X^T \varepsilon\right) =^p 0$

- Тогда из теоремы Slutsky следует, что оценка $\hat{\beta}$ по МНК состоятельна.

- При этом $Var(\hat{\beta}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Стохастические регрессоры 16

- Выводы:

1. Если в регрессионной модели регрессоры случайны, то при выполнении условий 1-3 МНК оценка и связанные с ней статистики являются условно и безусловно несмещенными
2. Имеет место условный вариант теоремы Гаусса-Маркова
3. При выполнении условий 4-5 МНК оценка состоятельна.
4. Если регрессоры и случайные ошибки коррелированы (нарушаются условия 2 и 5), то МНК оценка будет смещённой и несостоятельной.

Обобщённая регрессионная модель 1

- В классической регрессионной модели предполагается, что выполняется условие гомоскедастичности, т.е. условие независимости дисперсии случайной ошибки от номера наблюдения $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$
- Рассмотрим случай, когда условие гомоскедастичности снимается, т.е. имеет место гетероскедастичность.

Обобщённая регрессионная модель 2

- Пусть

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Здесь y – $n \times 1$ вектор объясняемых переменных, X – $n \times k$ матрица объясняющих переменных, ε – $n \times 1$ вектор случайных ошибок.

1. матрица X детерминирована и имеет полный ранг k .

2. $E(\varepsilon) = 0$;

3. $Var(\varepsilon) = \Omega$ и матрица Ω положительно определена.

- Из условия 3 следует, что Ω – симметричная матрица: $\forall x \neq 0 \ x^T \Omega x \geq 0$ и $\Omega = \Omega^T$.

Обобщённая регрессионная модель 3

1. Применим обычный метод наименьших квадратов к обобщённой регрессионной модели.

- Оценка вектора параметров β по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Обобщённая регрессионная модель 4

- Рассмотрим статистические характеристики оценки $\hat{\beta}$.
- $E(\hat{\beta})$
- $Var(\hat{\beta})$
- $E(e)$
- $Var(e)$ (используя, что $M^2 = M, M^T = M, MX = 0$)
- $E(e^T e)$

Обобщённая регрессионная модель 5

- Получаем:
- $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $Var(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T \Omega X (X^T X)^{-1}$
- $E(e) = ME(y) = 0$
- $Var(e) = M\Omega M^T = M\Omega M$
- $E(e^T e) = tr(M\Omega M) = tr(M^2 \Omega) = tr(M\Omega)$
- И следовательно,

$$E(\hat{\sigma}^2) = E \frac{e^T e}{n - k} = \frac{tr(M\Omega)}{n - k}$$

Обобщённая регрессионная модель 6

- Таким образом, если в качестве оценки матрицы ковариации $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ взять стандартную оценку обычного метода наименьших квадратов:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

- Тогда

$$E(\widehat{Var}(\hat{\beta})) = \frac{1}{n-k} \text{tr}(M\Omega) (X^T X)^{-1}$$

- А это не совпадает с $Var(\hat{\beta})$:

$$Var(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T \Omega X (X^T X)^{-1}$$

- Следовательно, оценка матрицы ковариаций вектора $\hat{\beta}$ при использовании обычного МНК получается смещённой.

Обобщённая регрессионная модель 7

- Тем не менее, полученная оценка $\hat{\beta}$ будет состоятельной, так как $Var(\hat{\beta}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
- В отличие от классической теоремы Гаусса-Маркова, оценка $\hat{\beta}$ не будет оптимальной (т.е. не будет иметь минимальную ковариационную матрицу).

Обобщённая регрессионная модель 8

2. Применим обобщённый метод наименьших квадратов к обобщённой регрессионной модели.

- Теорема Айткена.

Оценка

$$\hat{\beta}^* = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} y$$

вектора параметров β по методу наименьших квадратов является наиболее эффективной (в смысле наименьшей ковариационной матрицы) среди всех линейных несмещённых оценок для обобщённой регрессионной модели.

Обобщённая регрессионная модель 9

- Доказательство основано на том, что поскольку матрица Ω положительно определена и симметрична, а, следовательно, и Ω^{-1} положительно определена и симметрична, то существует невырожденная матрица P размера $(n \times n)$ такая, что

$$P^T P = \Omega^{-1}$$

Обобщённая регрессионная модель 9

- Умножим слева на P уравнение модели $y = X\beta + \varepsilon$.
- Тогда уравнение модели примет вид:

$$y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$$

где $y^* = Py$, $X^* = PX$, $\varepsilon^* = P\varepsilon$.

Причём $E(\varepsilon^*) = 0$, $Var(\varepsilon^*) = P\Omega P^T = I$.

Обобщённая регрессионная модель 10

Найдём:

- $E(\hat{\beta}^*)$
- $Var(\hat{\beta}^*)$

Обобщённая регрессионная модель 11

- $E(\hat{\beta}^*) = \beta$
- $Var(\hat{\beta}^*) = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1}$

Обобщённая регрессионная модель 12

- При применении обобщённого метода наименьших квадратов так же как и в обычной линейной регрессионной модели (парной, множественной) можно проверять гипотезы о значимости коэффициентов регрессии и/или о линейных ограничениях на коэффициенты регрессии.
- Например, предполагая, что случайные ошибки распределены по нормальному закону, можно:
 - проверить гипотезу $H_0: R\beta = r$ или $H_0: \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$ (вид статистик будет отличаться от статистик обычного МНК),
 - провести тест Чоу.

Обобщённая регрессионная модель 13

- Рассчитать коэффициент детерминации для обобщённой модели регрессии возможно, но интерпретировать по его значению качество модели не представляется возможным, так как:
 1. он может выходить за интервал $[0; 1]$,
 2. добавление/удаление регрессора не всегда приводит к уменьшению/увеличению коэффициента детерминации

Обобщённая регрессионная модель 14

- Если случайные ошибки распределены по нормальному закону, то для оценки вектора параметров β можно применить метод максимального правдоподобия, при этом оценка вектора параметров β по ММП совпадёт с оценкой по ОМНК (если известна матрица Ω).

Обобщённая регрессионная модель 15

- Для применения ОМНК нужно знать матрицу Ω , что на практике бывает очень редко.
- При этом применяется способ, называемый доступным обобщённым методом наименьших квадратов:
 1. оценить каким-нибудь способом матрицу Ω
 2. использовать эту оценку $\hat{\Omega}$ вместо матрицы Ω

Обобщённая регрессионная модель 16

Замечание.

- В общем случае матрица Ω содержит $n(n + 1)/2$ неизвестных параметра, а наблюдений всего n , поэтому для получения «хорошей» оценки $\hat{\Omega}$ вводят дополнительные ограничения на структуру матрицы Ω .

Метод взвешенных наименьших квадратов (ВНК)

Рассматривается модель $Y_i = a + b \cdot X_i + \varepsilon_i$ с диагональной ковариационной матрицей Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

где $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ $i = \overline{1, n}$, то есть дисперсии ошибок различны для разных наблюдений [4].

С помощью преобразования данных $Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}$, $X_i^* = \frac{X_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}$ получится гомоскедастичная модель (т.е. с постоянными дисперсиями).

$$Y_i^* = a \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2}} + b \cdot X_i^* + u_i, \quad Var(u_i) = 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Метод взвешенных наименьших квадратов

С помощью этих преобразований можно получить обычный МНК [4].

$$\sum_{i=1}^n e_i^{*2} = \sum_{i=1}^n \left(Y_i^* - \hat{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2}} - \hat{b} \cdot X_i^* \right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (Y_i - \hat{a} - \hat{b} \cdot X_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 / \sigma_i^2$$

Обозначая веса $w_i = 1/\sigma_i^2$, получается задача оптимизации:

$$\sum_{i=1}^n w_i (Y_i - (a + bX_i))^2 \rightarrow \min$$